المعاصر

محمد قداري

المغني في الرياضيات

هذا الكتاب مرفق بقرص تعليمي

سلسلة الرياضيات بالفيديو

السنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية

- أنشطة وتطبيقات محلولة بالفيديو .
- ملخصات هامة للدروس .
- 412 تمرين ومسألة محلولة .
- وضعيات إدماجية متنوعة و هادفة .
- تمارين ومسائل من بكالوريات أجنبية .
- الحلول المفصلة لمواضيع البكالوريا (المنهاج الجديد) .

BAC

وفق - البرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية
- التوزيع السنوي المعتمد وطنيا

المعاصرة

المحور الثاني

الاستمرارية

ما يجب أن يعرف

مفهوم الاستمرارية

1 . استمرارية دالة عند قيمة. استمرارية دالة على مجال:

تعريف: f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f.

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$.

(f مستمرة عند a) معناه ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$)

ملاحظات:

- شرط الاستمرارية يكتب كذلك: $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. وذلك بوضع $h = x - a$.

- القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.

التفسير البياني: تكون دالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

2 . الاستمرار من اليمين والاستمرار من اليسار:

تعاريف: - القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليمين معناه $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = f(a)$.

- القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليسار معناه $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = f(a)$.

نتيجة: - تكون دالة f مستمرة عند a إذا وفقط إذا كانت مستمرة من اليمين ومن اليسار عند a. لدينا: f مستمرة عند a معناه $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = f(a)$.

نتائج:

1 . تكون الدالة f مستمرة على المجال $[a;b]$ إذا وفقط إذا كانت f مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$ و مستمرة عند a من اليمين و مستمرة عند b من اليسار.

2 . تكون الدالة f مستمرة على المجال $[a;b[$ إذا وفقط إذا كانت f مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$ و مستمرة عند a من اليمين.

3 . تكون الدالة f مستمرة على المجال $]a;b]$ إذا وفقط إذا كانت f مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$ و مستمرة عند b من اليسار.

3 . خواص :

نقبل دون برهان أن : مجموع ، جداء ، حاصل قسمة و مركب دوال مألوفة ومستمرة هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج:

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ و $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

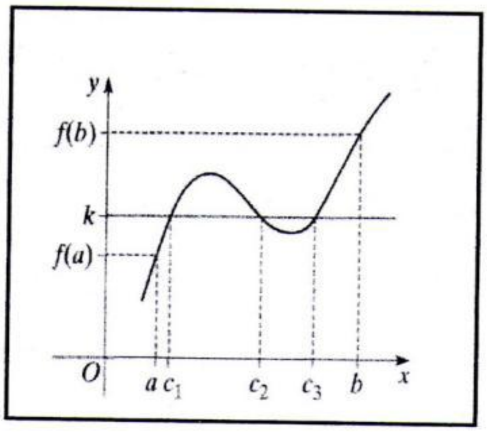
مبرهنة القيم المتوسطة

1. مبرهنة القيم المتوسطة :

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

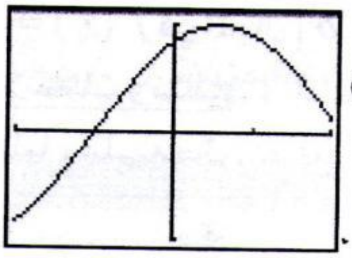
التفسير البياني:



f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحني (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.

(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).



حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$ ، أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.

2. المعادلة : $f(x)=k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة كخوارزمية التنصيف ، المسح ، ...

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

1 . صورة مجال بواسطة دالة مستمرة:

مبرهنة: بفرض f دالة كيفية ،مستمرة و رتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ نحصل على :

	صورة I بالدالة f هو المجال	
$I =$	f متزايدة تماما على I	f متناقصة تماما على I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x)\right[$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{\substack{< \\ x \to b}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{< \\ x \to b}} f(x);f(a)\right]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x);\lim\limits_{\substack{< \\ x \to b}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{< \\ x \to b}} f(x);\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x)\right[$

ملاحظة : تمدد المبرهنة السابقة إلى حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I غير محدود.

2 . الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال: $[a;b]$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

نتيجة: إذا كانت دالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ وإذا كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$. وبيانيا، في معلم، منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a;b]$.

ملاحظات و نتائج: 1 .إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ $\nearrow$	k $\nearrow$	$f(b)$

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ $\searrow$	k $\searrow$	$f(b)$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a;b]$.

2 . تمدد المبرهنة السابقة إلى حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

تذكير: الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رتابة الدالة على المجال المعتبر.

تمارين محلولة

تمرين 01

أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة a في كل ما يأتي:

1. $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $a=0$.

2. $f(x)=x^2$ ، $a=2$.
3. $f(x)=\sqrt{x}$ ، $a=0$.
4. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ;x\in[-1;2[\\ x-1 & ;x\in[2;5[\end{cases}$ ، $a=2$.

الحل

1 . الدالة f غير معرفة عند 0 ، ومنه f غير مستمرة عند 0 . (لا يمكن حساب $f(0)$).

2 . $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=2^2=4$ و $f(2)=2^2=4$. إذن: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

و بالتالي f مستمرة عند 2 .

3 . $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \sqrt{x}=\sqrt{0}=0$ و $f(0)=\sqrt{0}=0$. إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)=f(0)$.

و بالتالي f مستمرة عند 0 من اليمين .

4 . لدينا: $f(2)=2-1=1$.

و: $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} x^2=4\neq f(2)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}}(x-1)=1=f(2)$.

إذن: f مستمرة عند 2 من اليمين . وغير مستمرة عند 2 من اليسار . نستنتج عندئذ أن f غير مستمرة عند 2 .

تمرين 02

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)\sin x$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل

الدالتان $x\mapsto \sin x$ و $x\mapsto x+1$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

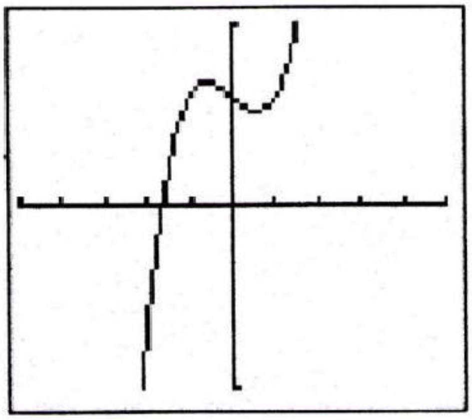
الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 03

برهن أن المعادلة $x^3-x=-3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

الحل

نعتبر ، مثلا ، f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-x$ (يمكن اختيار دالة أخرى)



لدينا: $x^{3}-x=-3$ تكافئ $f(x)=-3$. الدالة f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي مستمرة على المجال $[-2;-1]$. لدينا: $f(-2)=-6$ و $f(-1)=0$.
ومنه العدد -3 محصور بين العددين: $f(-2)$ و $f(-1)$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=-3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$. أي المعادلة $x^{3}-x=-3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

تمرين 04

بين أن المعادلة $x^{5}+x^{3}-1=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

الحل

نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^{5}+x^{3}-1$.
f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و لدينا:
$f(0)=-1$ و $f(1)=1$، العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.
أي المعادلة $x^{5}+x^{3}-1=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

تمرين 05

يعطى جدول تغيرات دالة f كما يلي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

عين بالدالة f صور المجالات التالية:
$]-\infty;0]$، $[0;2[$، $]-\infty;2[$، $]2;+\infty[$.

الحل

- صورة المجال $]-\infty;0]$ هو المجال $]1;2]$.
- صورة المجال $[0;2[$ هو المجال $]-\infty;2]$.
- صورة المجال $]-\infty;2[$ هو المجال $]-\infty;2]$.
- صورة المجال $]2;+\infty[$ هو المجال $]-\infty;1[$.

تمرين 06

يعطى جدول تغيرات دالة f كما يلي:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2 ↘	-1 ↗	$+\infty$

1) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟ برر.

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=-5$ ؟ برر.

الحل

1) • على المجال $]-\infty;-1]$ ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و $0\in]-\infty;2]$. إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_1 من المجال $]-\infty;-1]$.

• على المجال $[-1:1]$ ، الدالة f مستمرة و متناقصة تماما و $0\in[-1;2]$. إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_2 من المجال $[-1:1]$.

• على المجال $[1;+\infty[$ ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و $0\in[-1;+\infty[$. إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_3 من المجال $[1;+\infty[$.

خلاصة ماسبق:

المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول α_1 ، α_2 ، α_3 تنتمي على الترتيب إلى المجالات $]-\infty;-1]$ ، $[-1:1]$ ، $[1;+\infty[$. بيانيا :منحى f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب α_1 ، α_2 ، α_3 تنتمي إلى المجالات $]-\infty;-1]$ ، $[-1:1]$ ، $[1;+\infty[$.

2) • على المجال $]-\infty;-1]$ ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و $-5\in]-\infty;2]$. إذن المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا β_1 من المجال $]-\infty;-1]$.

• على المجال $[-1:1]$ ، $-5\notin[-1;2]$. إذن المعادلة $f(x)=-5$ لا تقبل حلولا في المجال $[-1:1]$.

• على المجال $[1;+\infty[$ ، $-5\notin[-1;+\infty[$. إذن المعادلة $f(x)=-5$ لا تقبل حلولا في المجال $[1;+\infty[$.

خلاصة ماسبق:

المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا β_1 من المجال $]-\infty;-1]$ ، بيانيا :منحى f يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=-5$ في نقطة وحيدة فاصلتها β_1 من المجال $]-\infty;-1]$.

تمرين 07

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-5x^2+3x+4$

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$

الحل

1) الدالة f دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

<u>إشارة</u> $f'(x)$: $3x^2 - 10x + 3$ كثير حدود من الدرجة الثانية مميزه $\Delta = 64$ يقبل جذرين متمايزين هما $\frac{1}{3}$ و 3. و بالتالي إشارة $3x^2 - 10x + 3$ هي كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3x^2 - 10x + 3x$		+	0	-	0	+	

و يكون جدول تغيرات f كما يلي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

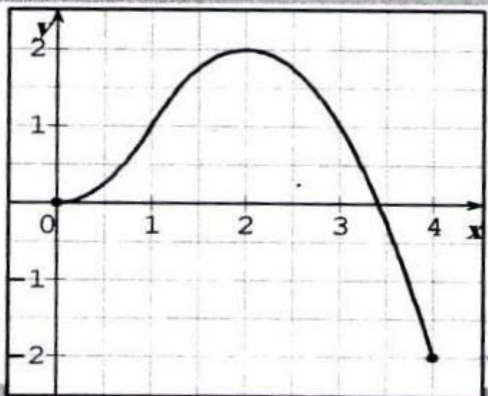
حيث: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2) المجال $[1;2]$ محتوى في المجال $\left[\frac{1}{3};3\right]$. إذن الدالة f متناقصة تماما على $[1;2]$ ولدينا:

$f(1) = 1^3 - 5\times1^2 + 3\times1 + 4 = 3 > 0$ و $f(2) = 2^3 - 5\times2^2 + 3\times2 + 4 = -2 < 0$

ومنه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$.

تمرين 08



الشكل التالي يمثل المنحني البياني لدالة f معرفة على $[0;4]$

1) عين صورة المجال $[0;4]$ بالدالة f .

2) على المجال $[0;4]$ ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{2}$ ؟

3) بقراءة بيانية أعط حصرا (طوله $0,5$) لكل حل من هذه الحلول (أو الحل).

الحل

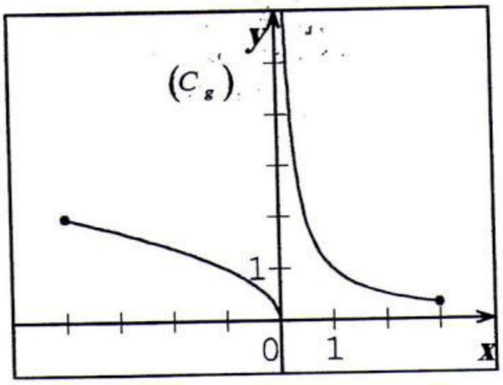
1) صورة المجال $[0;4]$ بالدالة f هو المجال $[-2;2]$.

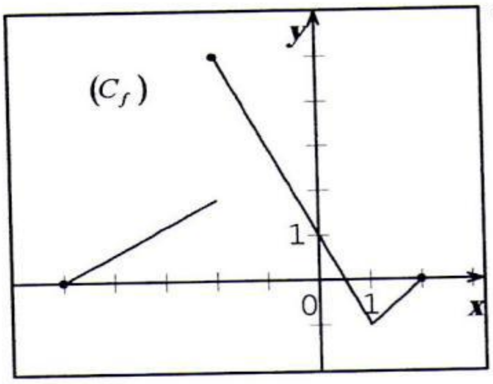
2) على المجال $[0;4]$: المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$ تقبل حلين مختلفين α و β (حيث $\alpha < \beta$)، لأن المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{3}{2}$ يقطع منحنى الدالة f في نقطتين مختلفتين فاصلتاهما α و β .

3) بقراءة بيانية نجد: $1<\alpha<1,5$ و $2,5<\beta<3$.

تمرين 09

f و g دالتان معرفتان على $[-5;2]$ و $[-4;3]$ على الترتيب ، الشكل التالي هو التمثيل البياني لهما في معلم .





1) هل الدالة f مستمرة على $[-5;2]$ ؟

2) هل الدالة g مستمرة على $[-4;3]$ ؟

3) اذكر مجالات تكون عليها الدالة f مستمرة.

4) اذكر مجالات تكون عليها الدالة g مستمرة.

الحل

1) الدالة f ليست مستمرة على $[-5;2]$ لأن منحناها مرسوم برفع القلم (اليد).
يظهر أن الدالة f ليست مستمرة عند العدد -2 .

2) الدالة g ليست مستمرة على $[-4;3]$ لأن منحناها مرسوم برفع القلم (اليد).
يظهر أن الدالة g ليست مستمرة عند العدد 0 .

3) مجالات تكون عليها الدالة f مستمرة :
f مستمرة على كل من المجالين : $[-5;-2[$ و $[-2;2]$.

4) مجالات تكون عليها الدالة g مستمرة :
g مستمرة على كل من المجالين : $[-4;0]$ و $]0;3]$.

تمرين 10

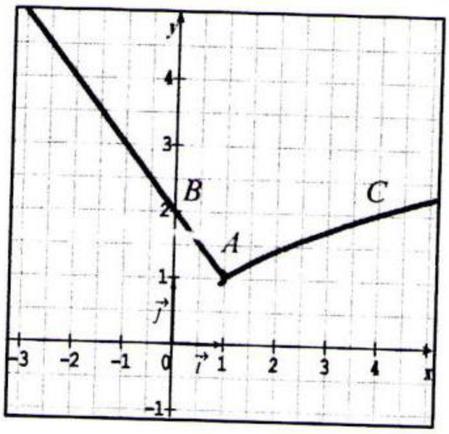
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x+2 \ ; \ x\in]-\infty;1] \\ f(x)=\sqrt{x} \quad ; \ x\in]1;+\infty[\end{cases}$$

1) أرسم المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا ؟

الحل



1) • على المجال $]-\infty;1]$ ، f هي عبارة عن دالة تآلفية يكون منحناها البياني عبارة عن نصف مستقيم مغلق مبدؤه النقطة $A(1;1)$ ويشمل نقطة أخرى مثلا $B(0;2)$

• على المجال $]1;+\infty[$ ، f هي الدالة الجذر التربيعي يكون منحناها البياني مفتوحا عند $A(1;1)$ ويشمل نقطة أخرى مثلا $C(4;2)$.

2) الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

لندرس استمرارية f عند 1 . لدينا:

$f(1)=-1+2=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(-x+2)=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\sqrt{x}=1$.

إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=f(1)$. وبالتالي f مستمرة عند 1 .

نستخلص مما سبق ، لكون الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ و مستمرة عند 1 . فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 11

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ إذا كان $x\neq1$ و $f(1)=3$

1) أدرس استمرارية f عند 1 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

الحل

1) **<u>دراسة استمرارية f عند 1</u>** : لدينا: $f(1)=3$ وعند حساب $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

نجد حالة عدم التعيين ، إذ أن : $\lim\limits_{x\to1}(x^3-1)=\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ ، أي من الشكل $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين:</u>

يمكن أن نستعمل طريقة الاختزال أو طريقة العدد المشتق ، نستعمل مثلا طريقة العدد المشتق . الدالة $g: x\mapsto x^3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي الدالة $g': x\mapsto 3x^2$

ومنه: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}\right)=g'(1)=3\times1^2=3$

إذن: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. وبالتالي f مستمرة عند 1 .

2) الدالة f دالة ناطقة ، فهي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ وبما أنها مستمرة عند 1. فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 12

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \dfrac{|x|}{x} \; ; \; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- أدرس استمرارية الدالة f عند العدد 0 .

الحل

لدينا: $\begin{cases} |x| = x & ; x > 0 \\ |x| = -x & ; x < 0 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \; ; \; x > 0 \\ f(x) = x^2 - 1 \; ; \; x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

لدينا: $f(0) = 1$. و $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} (x^2 + 1) = 1$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} (x^2 - 1) = -1$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x)$. إذن f لا تقبل نهاية عند 0 . و بالتالي f غير مستمرة عند 0.

تمرين 13

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$(m \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} f(x) = 3x + m \; ; \; x \in]-\infty;1[\\ f(x) = x^2 + 1 \; ; \; x \in [1;+\infty[\end{cases}$$

1) هل الدالة f مستمرة على $[1;+\infty[$ ؟ على $]-\infty;1[$ ؟

2) كيف تختار العدد m بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

3) أرسم (C) المنحني الممثل للدالة f .

الحل

1) الدالة f مستمرة على $[1;+\infty[$. لأنها على هذا المجال دالة كثير حدود، و f مستمرة على $]-\infty;1[$ لأنها على هذا المجال دالة تآلفية .

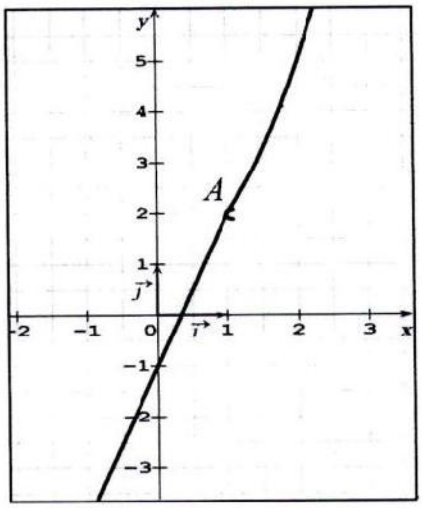
2) اختيار العدد m بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ مشروط بـ:

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = f(1)$.

لدينا: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

و : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (3x + m) = 3 + m$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(x^2 + 1\right) = 2$

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$ تكافئ $3 + m = 2$. أي $m = -1$.



لدينا عندئذ: $\begin{cases} f(x) = 3x - 1 \ ; \ x \in]-\infty;1[\\ f(x) = x^2 + 1 \ ; \ x \in [1;+\infty[\end{cases}$

3) رسم (C) منحنى f :

• على $]-\infty;1[$ يكون (C) عبارة عن نصف مستقيم مفتوح مبدؤه النقطة $A(1;2)$.

• على $[1;+\infty[$ يكون (C) عبارة عن جزء من القطع المكافئ صورة القطع المكافئ الممثل للدالة مربع بانسحاب شعاعه $\vec{j}$ ويشمل النقطة $A(1;2)$.

تمرين 14

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 3 \ ; \ x \in [1;+\infty[\\ f(x) = ... \ ; \ x \in]-\infty;1[\end{cases}$

اقترح عبارة لـ $f(x)$ على المجال $]-\infty;1[$ حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل

لدينا: $f(1) = 1^2 + 1 - 3 = -1$ ،إذن $f(1) = -1$. و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x^2 + x - 3) = -1$.

إذن اقتراح عبارة لـ $f(x)$ على المجال $]-\infty;1[$ مشروط بشرطين هما:

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1) = -1$ حتى تكون f مستمرة عند 1 من اليسار.

• f مستمرة على المجال $]-\infty;1[$.

نقترح مثلا : $f(x) = x - 2$. إن هذا الاقتراح يلبي مطلبينا إذ أن :

• الدالة: $x \to x - 2$ مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $]-\infty;1[$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x - 2) = -1$.

إذن، مثلا : $\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 3 \ ; \ x \in [1;+\infty[\\ f(x) = x - 2 \ ; \ x \in]-\infty;1[\end{cases}$

تمرين 15

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$

أدرس استمرارية f.

الحل

الدالة: $x \mapsto \cos x$ مستمرة على $\mathbb{R}$. و الدالة: $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^{2}}$ مستمرة كذلك على $\mathbb{R}$ لأنها دالة ناطقة معرفة على $\mathbb{R}$، إذ أن $1+x^{2} \neq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

إذن الدالة f هي عبارة عن حاصل دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$، فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 16

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		1		5		11		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	
$f(x)$	3	↘	-1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	7	↘	$-\infty$

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة. على المجموعة $\mathbb{R}-\{5\}$ المعادلة:

1) $f(x)=2$ تقبل على الأكثر ثلاثة حلول.

2) $f(x)=-1$ تقبل بالضبط حلا واحدا.

3) $f(x)=-5$ تقبل حلين مختلفين.

4) $f(x)=2011$ تقبل بالضبط حلا واحدا.

الحل

بالتمعن جيدا في الجدول المعطى وبالخصوص السطر الثالث فيه، بالاستعانة بمبرهنة القيم المتوسطة يكون لدينا:

1) خطأ، لأن:

- على المجال $]-\infty;1]$ الدالة f متناقصة تماما و $2\in[-1;3[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;1]$.
- على المجال $[1;5[$ الدالة f متزايدة تماما و $2\in[-1;+\infty[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1;5[$.
- على المجال $]5;11]$ الدالة f متزايدة تماما و $2\in]-\infty;7]$ فبالتالي المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]5;11]$.

- على المجال $[11;+\infty[$ الدالة f متناقصة تماما و $2\in]-\infty;7]$ فبالتالي المعادلة $f(x)=2$

تقبل حلا وحيدا في المجال $]11;+\infty[$.

<u>خلاصة ماسبق</u>: المعادلة $f(x)=2$ تقبل أربعة حلول.

2) <u>**خطأ**</u>، لأن:

- على المجال $]-\infty;5[$ العدد 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=-1$. (لاحظ أن $f(1)=-1$)
- على المجال $]5;11[$ الدالة f متزايدة تماما و $-1\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]5;11[$.
- على المجال $]11;+\infty[$ الدالة f متناقصة تماما و $-1\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]11;+\infty[$.

<u>خلاصة ماسبق</u>: المعادلة $f(x)=-1$ تقبل ثلاثة حلول.

3) <u>**صحيح**</u>، لأن:

- على المجال $]-\infty;5[$ ، لدينا: $-5\notin[-1;+\infty[$. فبالتالي المعادلة $f(x)=-5$ لا تقبل حلا.
- على المجال $]5;11[$ الدالة f متزايدة تماما و $-5\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]5;11[$.
- على المجال $]11;+\infty[$ الدالة f متناقصة تماما و $-5\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]11;+\infty[$.

<u>خلاصة ماسبق</u>: المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\in]5;11]$ و $\beta\in[11;+\infty[$.

واضح أن $\alpha\neq\beta$. لأنه لو كان $\alpha=\beta$، لكان $\alpha=\beta=11$. لكن 11 ليس حل للمعادلة $f(x)=-5$. إذ أن $f(11)=7$.

4) <u>**صحيح**</u>، لأن:

بمراقبة السطر الثالث للجدول نجد أن العدد 2011 ينتمي فقط إلى المجال $[-1;+\infty[$.

و الدالة f على المجال $]1;5[$ متزايدة تماما فبالتالي المعادلة $f(x)=2011$ تقبل بالضبط حلا واحدا.

تمرين 17

لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$ و جدول تغيراتها هو الآتي:

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

موقع الدراسة الجزائري www.eddirasa.com

بين أن المنحني $\left(C_f\right)$ الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما.

الحل

نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين على المجال $]-3;+\infty[$. لدينا:

- على المجال $]-3;0]$ ، الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما و $0\in[-2;+\infty[$. فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-3;0[$.
- على المجال $[0;2]$ ، الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما و $0\in[-2;4]$. فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $\beta\in[0;2]$.
- على المجال $]2;+\infty[$ ، لدينا $0\notin]2;4]$. ومنه المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلولا .

<u>**خلاصة ما سبق**</u>: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين α و β . لأن:

$\alpha\in]-3;0[$ و $\beta\in[0;2]$ فيكون : $\alpha\neq\beta$

<u>**ملحوظة**</u>:

لا يمكن أن يكون: $\alpha=\beta=0$ ، لأن $f(0)=-2\neq 0$. أي 0 ليس حل للمعادلة $f(x)=0$.

تمرين 18

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-6x^2+7$

1) أحسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) • بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$.
   • عين حصرا للعدد α طوله $0,5$
   • استنتج إشارة $f(x)$ على $[1;2]$.

الحل

1) الدالة f دالة كثير حدود تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.ولدينا:

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$. إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $3x(x-4)$ الذي يقبل جذرين متمايزين هما 0 و 4 ولدينا:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

وبالتالي جدول تغيرات الدالة f هو كما يلي:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

2) • نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$.

على المجال $[1;2]$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما لكون $[1;2]\subset[0;4]$. و لدينا:
$f(1)=2>0$ و $f(2)=-9<0$. فبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$.

• لنعين حصرا للعدد α طوله $0,5$ باستخدام طريقة التنصيف مثلا.

مركز المجال $[1;2]$ هو $\frac{1+2}{2}$ أي $\frac{3}{2}$. بما أن $f\left(\frac{3}{2}\right)=-3,125<0$ و لكون $f(1)=2>0$

نستنتج أن $\alpha\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$. أي $\alpha\in[1;1,5]$. طول المجال $[1;1,5]$ هو $0,5$

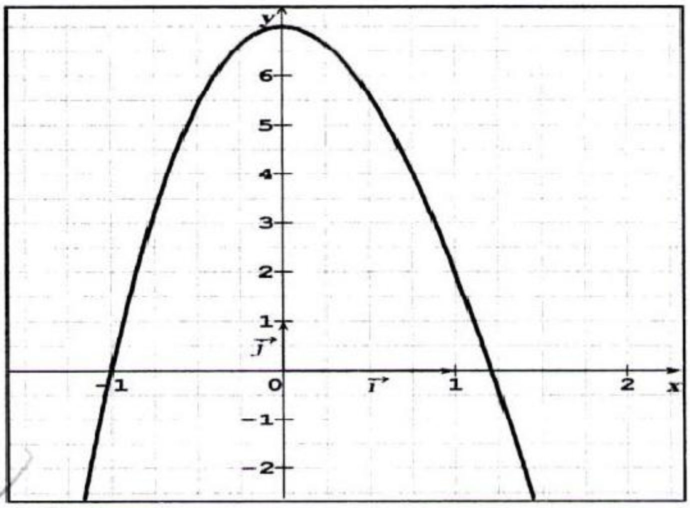
• استنتاج إشارة $f(x)$ على $[1;2]$:

مما سبق α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ على $[1;2]$ ومنه إشارة $f(x)$ هي كما في الجدول التالي:

x	1		α		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	

و هذا لكون الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1;2]$.

توضيح بياني:



تمرين 19

f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\sqrt{x}$

1) برر لماذا الدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$ ؟

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) احسب $f(3)$ و $f(4)$.

استنتج أن المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[3;4]$.

الحل

1) الدالة f هي عبارة عن مجموع الدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ المستمرتين على $[0;+\infty[$ فهي مستمرة على $[0;+\infty[$.

2) الدالة f هي عبارة عن مجموع الدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ القابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$.

إذن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $\qquad$ $+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

حيث $f(0) = 0 + \sqrt{0} = 0$.

3) • لدينا: $f(3) = 3 + \sqrt{3} < 5$ و $f(4) = 4 + \sqrt{4} = 6 > 5$

• الدالة f متزايدة تماما على المجال $[3;4]$ لكونها متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

وبما أن 5 محصور بين $f(3)$ و $f(4)$ نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x) = 5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[3;4]$.

تمرين 20

لتكن f دالة مستمرة على $[0;1]$ وتأخذ قيمها في $[0;1]$.

بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $[0;1]$.

الحل

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.

لنحقق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g على المجال $[0;1]$. لدينا:

• واضح أن الدالة g مستمرة على $[0;1]$ إذ أنها عبارة عن مجموع الدالتين:

f المستمرة فرضا على $[0;1]$ والدالة: $x \mapsto -x$ المستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[0;1]$.

• $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ لأن $f(0) \in [0;1]$.

و $g(1) = f(1) - 1 < 0$. لأن $f(1) \in [0;1]$ وبالتالي $f(1) - 1 < 0$.

إذن: $g(0) \times g(1) < 0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;1]$. المعادلة $g(x) = 0$ تكافئ المعادلة $f(x) - x = 0$ أي تكافئ المعادلة $f(x) = x$.

إذن: المعادلة $f\left(x\right)=x$ تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $\left[0;1\right]$.

تمرين 21

f دالة معرفة على $\left[0;\pi\right]$ بـ: $f\left(x\right)=2+\frac{1}{2}\sin x$.

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $\left[0;\pi\right]$ بحيث $f\left(\alpha\right)=\alpha$.

الحل

نعتبر الدالة g المعرفة على $\left[0;\pi\right]$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

لنحقق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g على المجال $\left[0;\pi\right]$. لدينا:

• واضح أن الدالة g مستمرة على $\left[0;\pi\right]$ إذ أنها عبارة عن مجموع الدالتين:

f المستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $\left[0;\pi\right]$ و الدالة: $x\mapsto -x$ المستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $\left[0;\pi\right]$.

• $g(0)=f(0)-0=2+\frac{1}{2}\sin\left(0\right)-0=2>0$،

و $g(\pi)=f(\pi)-\pi=2+\frac{1}{2}\sin\left(\pi\right)-\pi=2-\frac{1}{2}-\pi=\frac{3}{2}-\pi<0$.

إذن: $g(0)\times g(\pi)<0$.

• الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0;\pi[$ لأنها عبارة عن مجموع الدالتين السابقتين ، القابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهما قابلتين للاشتقاق على $]0;\pi[$ ولدينا:

$g'(x)=f'(x)-(x)'=\frac{1}{2}\cos(x)-1$. لنعين إشارة $g'(x)$ أي إشارة $\frac{1}{2}\cos(x)-1$.

لدينا من أجل عدد حقيقي x : $-1\le\cos x\le 1$ ومنه: $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\cos x\le\frac{1}{2}$ ، ومنه:

$-\frac{1}{2}-1\le\frac{1}{2}\cos\left(x\right)-1\le\frac{1}{2}-1$. أي: $-\frac{3}{2}\le\frac{1}{2}\cos\left(x\right)-1\le-\frac{1}{2}$. و بالتالي:

$g'(x)<0$. إذن g متناقصة تماما على المجال $]0;\pi[$ ويكون جدول تغيراتها كما يلي :

x	0	π
$g'(x)$	-	
$g(x)$	2 ↘	$\frac{3}{2}-\pi$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[0;\pi\right]$ أي $g(\alpha)=0$.

لدينا: $g(\alpha)=0$ تكافئ $f(\alpha)-\alpha=0$. أي تكافئ $f(\alpha)=\alpha$.

إذن: يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0;\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$.

تمرين 22

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3+x^2-x+1$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) ناقش ، حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

الحل

1) f دالة كثير حدود تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=3x^2+2x-1$.

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $3x^2+2x-1$ الذي يقبل جذرين متمايزين -1 و $\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

فيكون جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{22}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f(-1)=2$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{27}$.

2) نتمعن جيدا في السطر الأخير من جدول التغيرات ، فنجد :

- إذا كان $m<\frac{22}{27}$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا .
- إذا كان $m=\frac{22}{27}$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين مختلفين أحدهما $\frac{1}{3}$.
- إذا كان $\frac{22}{27}<m<2$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل ثلاثة حلول مختلفة .
- إذا كان $m=2$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين مختلفين احدهما -1 .
- إذا كان $m>2$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا.

تمرين 23

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على التوالي على $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x)=x^2-x+2$ و $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

بين أن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α محصورة بين 0 و 1.

الحل

إن فواصل نقاط تقاطع (C_f) و (C_g)، إن وجدت، هي حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

$f(x)=g(x)$ تكافئ $\dfrac{1}{x}=x^2-x+2$ أي $\dfrac{x^3-x^2+2x-1}{x}=0$ أي:

$x^3-x^2+2x-1=0$.

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x^3-x^2+2x-1$، ولنبين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ محصورا بين 0 و 1. باستخدام مبرهنة القيم المتوسطة.

h دالة كثير حدود تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $h'(x)=3x^2-2x+2$.

إشارة $h'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $3x^2-2x+2$ الذي لا يقبل جذورا في $\mathbb{R}$ (مميزه $\Delta=-20<0$).

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$

فيكون جدول تغيرات f كما يلي:

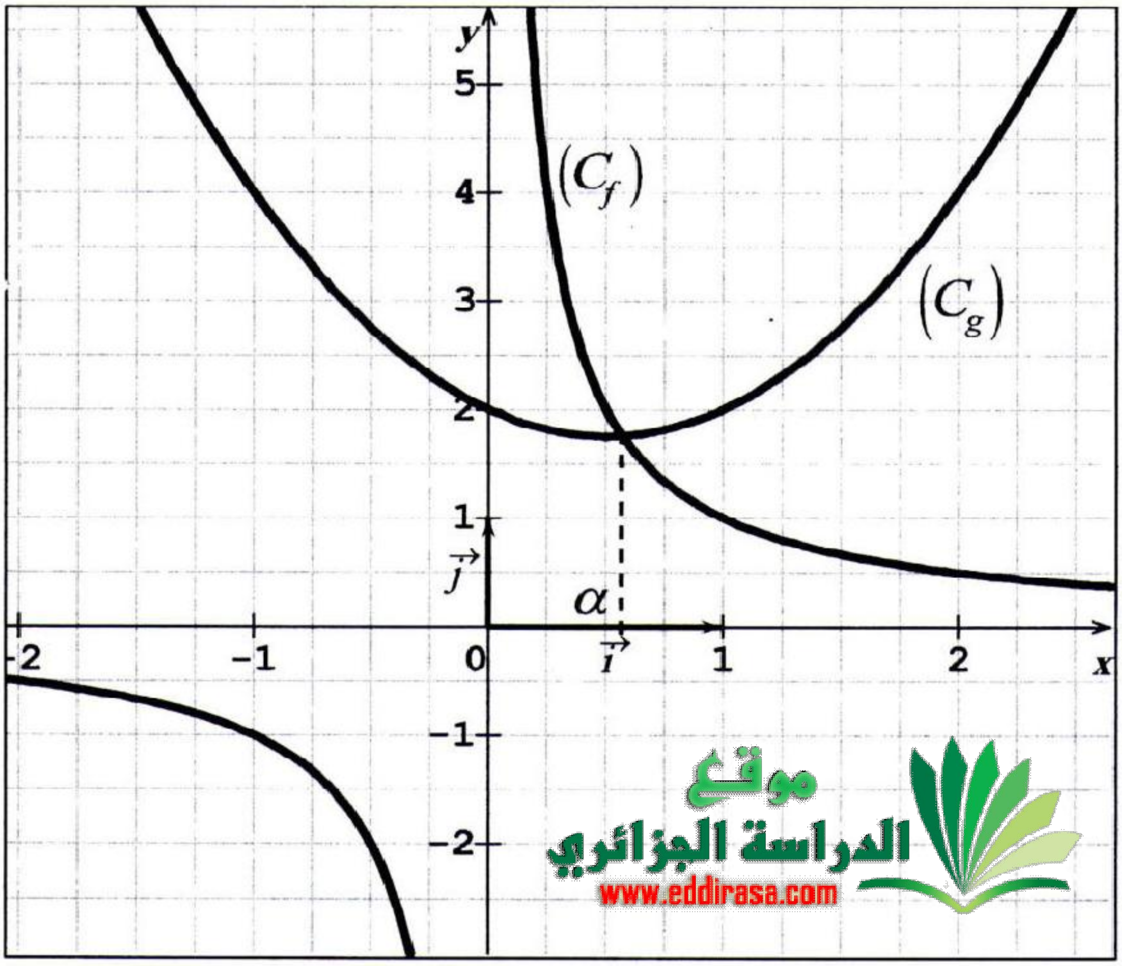
x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

حيث: $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

بما أن h متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$. لإثبات أن α محصور بين 0 و 1 يكفي أن نتحقق من أن $h(0)\times h(1)<0$. لدينا بالفعل: $h(0)=-1<0$ و $h(1)=1>0$.

ومنه $h(0)\times h(1)<0$.

توضيح بياني:



أقدم لكم هذا العمل عسى ان يكون سندا لكم في مسيرتكم الدراسية

كل ما أتمناه دعوة منكم بالنجاح و المغفرة

لي و لوالدي و عائلتي

سلامي إليكم و وفقكم الله لما يحب و يرضاه

من رفع صافي الروح (محمد)